

渤海海冰动力学中的粘弹塑性本构模型

季顺迎, 岳前进, 姚 征

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116023)

摘要: 在粘塑性海冰本构模型的基础上, 将 Kelvin-Voigt 粘弹性本构理论引入到海冰动力学中, 进而建立了粘弹塑性海冰本构模型。该模型可较好地反映渤海海冰在小应变和小应变率条件下的粘弹性力学行为, 同时还考虑了大应变率下的海冰粘塑性力学行为。对渤海辽东湾海冰进行了 48h 数值模拟。结果表明: 粘弹塑性海冰本构方程较 Hibler 的粘塑性本构模型可更好地处理渤海的海冰间相互作用, 提高海冰数值模拟的计算精度。

关键词: 海冰动力学; 本构方程; 粘塑性模型; 粘弹塑性模型; 海冰数值模拟

中图分类号: P 731.15 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-6791(2002)05-599-06

海冰数值模拟中的海冰动力学是影响海冰漂移和形变的重要因素, 其中表征冰间相互作用的海冰本构模型最为复杂。在早期的海冰动力学研究中, 人们将海冰视为二维连续体, 分别建立了线粘性、弹塑性和粘塑性海冰本构模型^[1~4]。在极区及其冰缘区的中、长期海冰数值模拟中, Hibler 的粘塑性海冰本构模型得到了最广泛的应用。为提高海冰长期数值模拟的计算效率, 该粘弹塑性海冰本构模型忽略了海冰的弹性变形, 仅将海冰变形视为海冰应变率的函数^[4~6]。基于粘塑性本构模型, Flato 和 Hibler (1992) 为研究极区海冰对全球气候的影响, 提出了“空化流体”模型以增强海冰数值模拟的计算效率^[7]。Hunke 等 (1997) 建立了弹粘塑性海冰本构模型, 以提高短期海冰数值模拟中海冰内力的计算精度^[8]。Lu 等 (1998) 考虑冰体粘弹性变形行为, 对 Hibler 的粘塑性本构模型进行了改进以研究冰塞的形成机理^[9]。

在渤海海冰的热力 - 动力耦合的中、小尺度数值模拟中, 为进一步提高海冰动力学的计算精度, 应充分考虑小应变和小应变率下海冰形变中的粘弹性力学行为。另外, 尽管 Hibler 的粘塑性海冰本构模型给出了海冰屈服函数, 但在以往海冰数值模拟中又将一特定的应变速率值或块体粘性系数作为海冰屈服判据, 这使得海冰在屈服前后的应力状态不连续。

本文将充分考虑海冰在小应变和小应变率下的粘弹性力学行为, 并引入 Kelvin - Voigt 粘弹模型, 在 Hibler 粘塑性海冰本构模型的基础上建立粘弹塑性海冰本构模型, 进而对渤海海冰动力学进行较为精确的数值计算。

1 粘塑性海冰本构模型

海冰漂移的动力方程是按牛顿定律来描述的。单位面积海冰的运动平衡方程为

$$M \frac{dV_i}{dt} = - Mf K \times V_i + a + w - Mg \nabla w + \nabla \cdot (\bar{h}) \quad (1)$$

收稿日期: 2001-08-27; 修订日期: 2001-10-04

基金项目: 国家自然科学基金项目 (59739170); 中国海洋石油渤海公司重点资助项目

作者简介: 季顺迎(1972 -), 男, 河北武邑人, 大连理工大学讲师, 博士, 主要从事渤海海冰数值模拟及其工程应用研究。

式中 $M = \rho_i \bar{h}$, 为单位面积海冰质量, 其中 ρ_i 和 \bar{h} 分别为海冰密度和平均冰厚, 且 $\bar{h} = A h_i$, A 为海冰密集度; V_i 为海冰速度矢量; $f = 2 \omega_e \sin \phi$, 为科氏参数, 其中 ω_e 为地转角速度, ϕ 为地理纬度; K 为与海面垂直向上的单位矢量; a 和 w 分别为风和流对海冰的拖曳力; g 为重力加速度; w 为瞬时海面高度; σ_{ij} 为冰内应力张量。

在海冰数值模拟中, 海冰本构方程大都建立在连续介质力学的基础上, 并将海冰视为二维连续体, 其中应用最广泛的是 Hibler 的粘塑性本构方程, 其应力 - 应变关系为^[4]

$$\sigma_{ij} = 2 \eta \dot{\epsilon}_{ij} + (\eta - \eta_{max}) \delta_{ij} - P \delta_{ij} / 2 \quad (i, j = 1, 2) \quad (2)$$

式中 σ_{ij} 和 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 分别为二维应力和应变速率张量; δ_{ij} 为 Kronecker 算子; P 为冰内静水压力项; η 和 η_{max} 分别为非线性块体粘性系数和切变粘性系数, 且 $\eta = \eta_{max} / e^2$, 其中 e 为海冰屈服曲线的椭圆率。Hibler 指出, 在严格的塑性情况下, 为了使 η 和 η_{max} 在零应变率处得到定义, 可将海冰按严格的线粘性流体处理, 即对 η 的最大值加以控制, 有

$$\eta = \min(P/2, \eta_{max}) \quad (3)$$

式中 η_{max} 可取为 $5.0 \times 10^7 P$, $2.5 \times 10^8 P$ 或 $5.0 \times 10^9 P^{[4,6]}$; $e = \sqrt{\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{22}^2 + 4 \dot{\epsilon}_{12}^2}$, 且 $\dot{\epsilon}_{11} = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}$, $\dot{\epsilon}_{22} = \sqrt{(\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22})^2 + 4 \dot{\epsilon}_{12}^2}$; Hibler 给出的冰内静水压力项 P 为^[4]

$$P = P^* \exp[-C(1 - A)] \quad (4)$$

式中 P^* 和 C 是经验常数。一般取 $C = 20.0$, 而对于 P^* , 不同研究者取值有很大差异。

由式(3)可见, 当应变速率较小时, η 和 η_{max} 均为常数, 且 $\eta = \eta_{max}$, 此时 Hibler 的粘塑性海冰本构模型简化为线粘性模型; 而当 $\eta > \eta_{max}$ 时, 海冰进入塑性状态, η 和 η_{max} 成为应变率张量的非线性函数, 海冰主应力状态位于椭圆屈服曲线之上。该椭圆屈服函数表征为^[4]

$$F(\sigma_1, \sigma_2, P) = \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + P}{P} \right]^2 + \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{P} \right]^2 - 1 = 0 \quad (5)$$

式中 σ_1 和 σ_2 为冰内第一和第二主应力。

Hibler 的粘塑性海冰本构理论能够很好地反应出海冰抗压能力明显强于抗拉能力的特征, 并有效地进行海冰动力学的非线性数值模拟。它不会出现采用弹塑性本构模型进行海冰数值模拟时因弹性波问题而引起的人为麻烦^[8]; 另外, 它在欧拉差分网格中便于数值计算, 非常适用于长期季节性海冰的数值模拟。

2 粘弹塑性海冰本构模型的建立

在 Hibler 的粘塑性本构模型中, 考虑在极区及其冰缘区进行大尺度长期数值模拟时, 海冰的弹性应变明显小于非弹性应变的特点, 从而将海冰形变中的弹性部分忽略; 另外, 为了使式(2)在零应变率处有定义, 它将应变率的函数 η_{max} 作为海冰屈服的判据。在渤海海冰数值模拟中, 尤其是在模拟海冰的断裂、重叠和成脊过程中, 计算的空间和时间尺度都明显小于极区, 这时可考虑海冰的弹性变形; 另外, 采用海冰应力状态的屈服函数 $F(\sigma_1, \sigma_2, P)$, 而不是块体粘性系数 η_{max} , 作为海冰是否进入塑性阶段的判据, 将会使海冰在屈服前后保持连续的应力状态, 进而更加合理地模拟海冰形变过程。

考虑以上两种情况, 可在 Hibler 粘塑性海冰本构模型的基础上, 引入能够体现海冰蠕变特性的 Kelvin-Voigt 粘弹性模型, 进而建立粘弹塑性海冰本构模型, 如图 1 所示。该模型有如下关系^[10]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij, TOTAL} = \sigma_{ij, VE} + \sigma_{ij, VP} \\ \sigma_{ij, TOTAL} = \sigma_{ij, VE} = \sigma_{ij, VP} \end{cases} \quad (6)$$

式中 $\sigma_{ij, TOTAL}$ 和 $\sigma_{ij, TOTAL}$ 分别为总应变和总应力； $\sigma_{ij, VE}$ 和 $\sigma_{ij, VE}$ 分别为粘弹性应变和应力； $\sigma_{ij, VP}$ 和 $\sigma_{ij, VP}$ 分别为粘塑性应变和应力。

类似于岩土材料，海冰的压缩强度要高于其拉伸强度，考虑冰内静水压力项的影响，将 Kelvin-Voigt 本构方程写成应力的表达式，可得到海冰的粘弹性阶段的本构模型：

$$\sigma_{ij} = 2 \nu_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + (\nu_{ij} - \nu_{ij}) \sigma_{kk ij} + 2 G_{ij} \epsilon_{ij} + (K - G) \sigma_{kk ij} - P_{ij}/2 \quad (7)$$

式中 ν_{ij} 和 ν_{ij} 分别为海冰的线性切变和块体粘性系数； G 和 K 分别为海冰的剪切弹性模量和块体弹性模量； P 为海冰静水压力项，可由式(4)计算。考虑海冰密集度对海冰力学性质的影响，并参考 Hibler 粘塑性模型中海冰静水压力的处理方法^[4]，可将式(7)中的参数 ν_{ij} 、 ν_{ij} 、 G 和 K 均视为密集度的函数，且随密集度的衰减系数为 $C_0 = \exp[-C(1-A)]$ ，其中 C 和 A 的物理意义同式(4)。于是有

$$\nu_{ij} = \nu_{0ij} C_0, \quad \nu_{ij} = \nu_{0ij} C_0 \quad (8)$$

$$K = \frac{EC_0}{2(1-\nu_{ij})}, \quad G = \frac{EC_0}{2(1+\nu_{ij})} \quad (9)$$

式中 ν_{0ij} 和 ν_{0ij} 为海冰块体和切变粘性常数； E 为弹性模量； ν_{ij} 为泊松比。

该粘弹塑性海冰本构模型既考虑了小应变和小应变率条件下的粘弹性力学行为，也考虑了大应变率下的海冰粘塑性力学行为。它是一个分段式本构模型，即在海冰屈服前的低应力状态下，采用 Kelvin-Voigt 粘弹模型计算冰内应力；当应力达到一定值时，海冰发生屈服，采用 Hibler 粘塑性模型计算冰内应力。

3 辽东湾海冰数值模拟实验

下面依次采用以上两种本构模型对渤海辽东湾海冰进行数值模拟。在采用有限差分法进行海冰数值模拟时，时间步长为 10 min，网格尺度为 $0.05^\circ \times 0.05^\circ$ (经纬度)。模拟中的输入信息主要是海冰初始条件、气象和水文条件。海冰初始冰厚和密集度分布由 NOAA 卫星遥感资料获取；气象条件则采用辽东湾 JZ20-2 平台上的实测值；渤海流速和潮汐采用 Leendertse 二维非线性长波模式进行数值计算^[11]。从 1999 年 2 月 3 日 6:50 至 2 月 5 日 6:50，采用有限差分法对辽东湾海冰进行 48 h 动力-热力数值模拟，其部分计算参数列于表 1 中。由 NOAA 卫星遥感得到的海冰初始冰厚和密集度如图 2 所示。

表 1 辽东湾海冰数值模拟中的基本参数

Table 1 Basic parameters for sea ice numerical simulation of Liaodong Bay

变 量	定 义	取 值	变 量	定 义	取 值
t	时间步长	600 s	C_a	风拖曳系数	0.0015
i	海冰密度	$910 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	ν_0	块体粘性常数	$1.0 \times 10^8 \text{ Pa}$
w	海水密度	$1010 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	E	海冰弹性模量	$2.2 \times 10^6 \text{ Pa}$
C_w	流拖曳系数	0.0025	C	压力项经验常数	20.0
$dx \cdot xdy$	网格尺寸(经纬度)	$0.05^\circ \times 0.05^\circ$	ν_0	切变粘性常数	$2.5 \times 10^7 \text{ Pa}$
a	空气密度	$1.29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	ν	海冰泊松比	0.3
e	屈服曲线椭圆率	2.0	P^*	海冰压力项常数	$1.25 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$

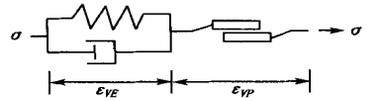


图 1 粘弹塑性海冰本构模型
Fig. 1 Viscous-Elastic-Plastic constitutive model of sea ice

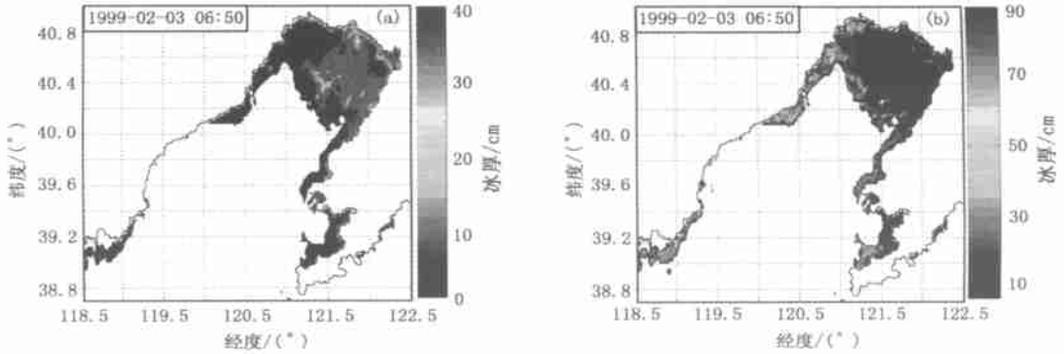


图 2 NOAA 卫星遥感的(a)初始海冰厚度和(b)密集度 (%) 分布

Fig.2 Initial distribution of sea ice thickness (a) and concentration remote-sensed with NOAA Satellite (b)

由 NOAA 卫星遥感的 2 月 4 日 6 39 和 2 月 5 日 6 28 的海冰厚度分布如图 3 所示。从 2 月 3 日 6 50 开始, 采用粘塑性 (Viscous-Plastic, VP) 和粘弹塑性 (Viscous-Elastic-Plastic, VEP) 海冰本构方程模拟的 24 h 和 48 h 后辽东湾冰厚分布如图 4 和图 5 所示。海冰厚度和密集度分布的平均误差列于表 2 中。可以看出, 无论是冰厚还是密集度, 采用粘弹塑性模型得到的计算结果均优于粘塑性模型的结果。因此, 在辽东湾的中小尺度短期海冰数值模拟中, 粘弹塑性海冰本构模型更能反应海冰的流变特征。

表 2 不同本构模型下海冰数值模拟结果平均误差
Table 2 Mean error of sea ice numerical simulation with different constitutive models

日期	参数	VP 模型	VEP 模型
4 日 6 30	冰 厚/cm	4.04	3.14
	密 集 度/%	12.20	9.60
5 日 6 30	冰 厚/cm	4.43	3.45
	密 集 度/%	13.70	10.90

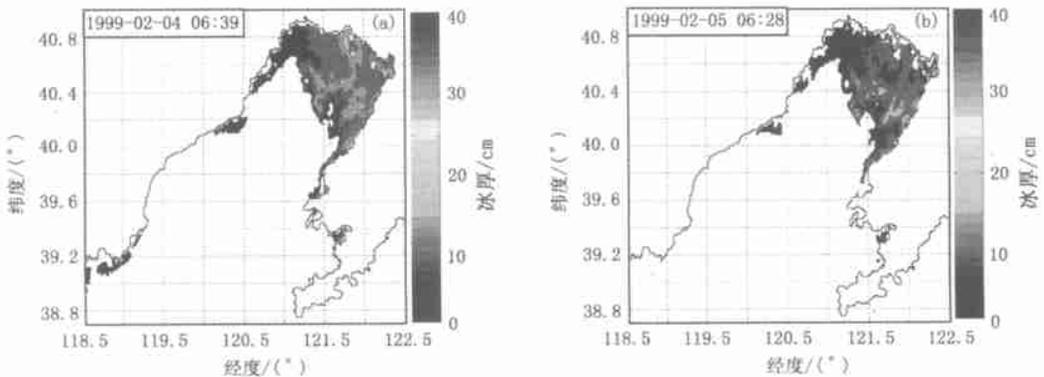


图 3 卫星遥感的辽东湾(a)24 h 和(b)48 h 冰厚分布

Fig.3 Ice thickness distributions of Liaodong Bay remote sensed with NOAA Satellite after 24 hours (a) and 48 hours (b)

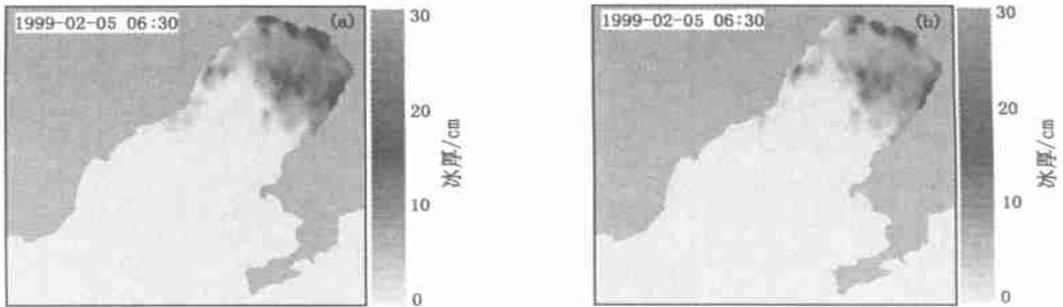


图 4 采用粘塑性海冰本构模型计算的辽东湾 (a) 24 h 和 (b) 48 h 冰厚分布

Fig. 4 Ice thickness distributions of Liaodong Bay after 24 hours (a) and 48 hours (b) simulated with VP model

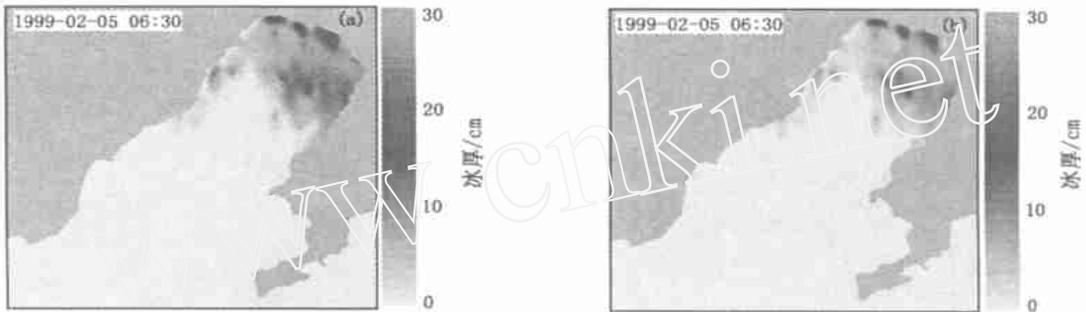


图 5 采用粘弹塑性海冰本构模型计算的辽东湾 (a) 24 h 和 (b) 48 h 冰厚分布

Fig. 5 Ice thickness distributions of Liaodong Bay after 24 hours (a) and 48 hours (b) simulated with VEP model

4 结 语

针对渤海海冰数值模拟中的时空尺度特点，在 Hibler 粘塑性海冰本构模型的基础上，引入 Kelvin-Voigt 粘弹性本构理论，建立了粘弹塑性海冰本构模型。该模型既考虑了小应变和小应变率条件下的粘弹性力学行为，也考虑了海冰屈服后的粘塑性力学行为。通过辽东湾海冰的数值试验，初步确定了粘弹塑性海冰模型中的计算参数。分别采用 Hibler 粘塑性和改进的粘弹塑性海冰本构模型对辽东湾海冰进行了 48 h 数值模拟。将模拟结果与海冰卫星遥感资料对比发现，无论是海冰厚度，还是密集度，采用粘弹塑性海冰模型都能达到较高的计算精度。由此可见，粘弹塑性海冰本构方程较粘塑性本构模型可更好应用于渤海海冰的短期动力学计算。该模型经进一步检验和完善后，可用于模拟渤海冰脊和重叠冰的形成过程。

致谢：感谢国家海洋局海洋环境预报中心刘建强教授提供的 NOAA 卫星海冰遥感资料。

参考文献：

- [1] Campbell W J. The wind-driven circulation of ice and water in a polar ocean[J]. Journal of Geophysical Research, 1965, 70: 3279 - 3301.
- [2] Hibler W D. Differential sea ice drift II: Comparison of mesoscale strain measurements to linear drift theory predictions

- [J]. *Journal of Glaciology*, 1974, 13: 457 - 471.
- [3] Pritchard R S. An elastic-plastic constitutive law for sea ice[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1975, 42: 379 - 384.
- [4] Hibler W D. A dynamic thermodynamic sea ice model[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 1979, 9: 817 - 846.
- [5] Zhang Jinlun, Hibler W D. On an efficient numerical method for modeling sea ice dynamics[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1997, 102(C4): 8691 - 8702.
- [6] Lepparanta M, Hibler W D. The role of plastic ice interaction in marginal ice zone dynamics[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1985, 90(C6): 11899 - 11909.
- [7] Flato GM, Hibler W D. Modeling pack ice as a cavitating fluid[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 1992, 22: 626 - 651.
- [8] Hunke E C, Dukowicz J K. An elastic-viscous-plastic model for sea ice dynamics[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 1997, 27: 1849 - 1867.
- [9] Lu S, Shen H T. Constitutive laws for river ice dynamics[A]. Shen H T *Ice in Surface Water*[C]. New York, 1998. 109 - 116.
- [10] 杨挺青. 粘弹性力学[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1992. 12 - 15.
- [11] 窦振兴, 罗远途, 黄克辛, 等. 渤海潮流及潮流余流的数值计算[J]. *海洋学报*, 1981, 3(3): 355 - 369.

Viscous-elastic-plastic constitutive model for sea ice dynamics in the Bohai Sea^{*}

JI Shun-ying, YUE Qian-jin, YAO Zheng

(*State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China*)

Abstract: The viscous plastic constitutive model for sea ice dynamics has been widely applied in sea ice numerical simulations of the polar regions and their marginal ice zones. This model, however, can't be used to simulate the ice rafting and ridging processes that occur over small temporal and spatial scales. This presents a problem in the Bohai Sea where due to the dynamic conditions that exist, these processes are significant factors. To remedy this situation, the Kelvin-Voigt viscous elastic constitutive equation was introduced into the sea ice dynamics, and a viscous-elastic-plastic constitutive model was developed based on the viscous plastic model. In the numerical sea ice simulation, both the viscous elastic behavior under small strains and strain rates, and the viscous plastic behavior under high strains and strain rates can be properly modeled. The sea ice dynamic process of Liaodong Bay was simulated for 48 hours, and the results indicate that the viscous-elastic-plastic model is more accurate.

Key words: sea ice dynamics; constitutive equation; viscous-plastic model; viscous-elastic-plastic model; sea ice numerical simulation

* The project is supported by National Natural Science Fund of China(No. 59739170).