

文章编号: 1000-4750(2013)01-0463-07

# 海冰与直立结构相互作用的离散单元数值模拟

季顺迎, 狄少丞, 李 正, 毕祥军

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

**摘 要:** 在冰区油气开发中, 海冰会导致海洋结构的强烈振动, 并对结构累积疲劳损伤、上部油气管线和设备, 以及操作人员健康构成很大的威胁。在海冰与直立海洋结构的相互作用中, 冰荷载的幅值和频率一直是海冰工程研究的重要内容。该文针对海冰与直立海洋结构作用中的破碎过程, 建立了海冰的离散单元模型。它将海冰离散为若干个规则排列且具有粘接-破碎功能的颗粒单元, 并通过海冰单轴压缩试验对单元间的粘接强度进行确定; 在此基础上对直立海洋平台结构的作用过程进行了数值计算, 获得了不同桩径下的冰荷载和结构冰振响应, 为冰区平台结构设计和现役海洋结构的疲劳寿命评估提供了参考依据。

**关键词:** 海冰; 海洋结构; 冰荷载; 离散单元模型; 粘接强度

中图分类号: P751; P731.15 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.07.0417

## DISCRETE ELEMENT MODELLING OF INTERACTION BETWEEN SEA ICE AND VERTICAL OFFSHORE STRUCTURES

JI Shun-ying, DI Shao-cheng, LI Zheng, BI Xiang-jun

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract:** In the exploitation of oil and gas in ice-covered regions, sea ice can cause strong vibration of offshore structures, result in accumulated fatigue damage of structures and threat the safety of upper pipelines and facilities and the health of staff. It is important to determine the magnitude and frequency of ice load on offshore structures in sea ice engineering. In this study, a discrete element model was developed to simulate the interaction between sea ice and vertical structures. The sea ice cover was dispersed (DEM) into spherical elements with a bonding-breaking function. The bonding strength between particles was determined through the uniaxial compression test of sea ice. The interaction between ice cover and vertical offshore structures was simulated with DEM, and the ice loads on vertical structure with various pile diameters were obtained. This investigation will benefit the rational design of new offshore structures and the fatigue life estimation of existing structures in ice-covered regions.

**Key words:** sea ice; offshore structure; ice load; discrete element model; bonding strength

在冰区油气开发中, 直立海洋结构是采用最早也是应用最广的海洋结构形式。在我国渤海油气开发的初期, 均采用直立腿式海洋平台结构。虽然, 近年来锥体结构得到了较多的应用, 但直立腿海洋平台仍然是冰区油气开发中常见的结构类型。在海冰与直立结构的相互作用中, 冰荷载问题由最初的

静冰力研究逐渐转为动冰力研究, 以对冰激结构振动响应和疲劳寿命进行评估<sup>[1-3]</sup>。

在海冰与直立腿结构相互作用过程中, 海冰以挤压破碎为主, 并因冰速的不同表现为不同的破碎模式, 即慢冰速下的准静态韧性破坏、中冰速下的韧脆转化破坏和快冰速下的脆性破坏<sup>[4-5]</sup>。在海冰

收稿日期: 2011-07-03; 修改日期: 2011-12-28

基金项目: 国家海洋公益性行业科研专项项目(201105016, 2012418010); 国家自然科学基金项目(41176012); 美国船级社(ABS)项目(2010-12)

通讯作者: 季顺迎(1972-), 男, 河北武邑人, 教授, 博士, 从事工程海冰数值模式研究(E-mail: jisy@dlut.edu.cn).

作者简介: 狄少丞(1986-), 男, 山西五寨人, 博士生, 从事离散单元模型研究(E-mail: dishaocheng@mail.dlut.edu.cn);

李 正(1987-), 男, 辽宁锦州人, 硕士生, 从事工程海冰数值模式研究(E-mail: lizheng@mail.dlut.edu.cn);

毕祥军(1970-), 男, 黑龙江鹤岗人, 副教授, 硕士, 从事寒区海洋工程研究(E-mail: bixj@dlut.edu.cn).

的不同破碎模式中, 破碎是最常见的形式。在破碎过程中, 海冰的抗压强度是决定动冰力的重要参数<sup>[6]</sup>。近年来, 人们通过理论分析、试验测试和数值方法系统地研究了海冰与直立结构的相互作用过程<sup>[7-9]</sup>。然而, 由于海冰破碎的随机性、海冰力学性质的复杂性以及影响参数的多样性, 还需要对海冰与直立结构随机作用过程中的冰荷载问题作进一步研究。

目前, 在海冰荷载的数值模型中, 大多采用有限元方法计算海冰与结构物的相互作用<sup>[10-12]</sup>。它可以处理相对复杂的力学模型和边界条件, 但需要明确海冰的本构模型、强度特性和计算参数。此外, 采用有限元法对海冰细观结构和海冰破碎过程的描述上还有一定的困难。最近, 基于离散单元模型的海冰与结构物相互作用研究取得了很大的进展<sup>[13-15]</sup>。离散单元模型在细观尺度下可以描述海冰材料的结构性质, 在宏观上又能够合理地模拟海冰与结构作用时的破碎规律, 获得冰荷载的冰力时程, 在冰荷载计算方面显示出很强的优势。海冰荷载的离散单元模型可依据单元的形态分为颗粒离散单元和块体离散单元两类。块体离散单元模型更多地应用于宽大锥体前的海冰重叠和堆积过程模拟, 而在冰激结构振动数值模拟方面的应用相对较少。在颗粒离散单元模型中, 冰排可依据冰晶结构特点由多个球形颗粒粘接而成, 冰排的不同破碎模型可通过颗粒材料性质及单元间粘接强度的设定来描述。由于颗粒单元模型具有物理意义明确、接触模型简便、接触判断快速等优点, 在海冰与结构物相互作用的计算中有很大的优势。

为此, 本文将采用颗粒离散单元模型对海冰的压缩强度进行数值模拟, 并与实验数据对比以验证其可行性。在此基础上对海冰与直立体之间的相互作用进行数值模拟, 确定不同桩径下结构的冰振响应和冰荷载。

## 1 海冰的离散单元模型

在采用离散单元模型计算海冰的动力作用及破碎过程中, 将海冰离散为具有一定质量和大小的颗粒单元, 单元间具有相应的粘接作用。这里对海冰离散元模型中的接触力模型、粘接模型及粘接强度的设定进行介绍。

### 1.1 单元间的接触力模型

在颗粒相互作用过程中, 一般考虑单元间因相

对速度和弹性变形而引起的粘弹性作用力, 并采用 Mohr-Coulomb 摩擦定律计算剪切力<sup>[16-17]</sup>, 如图 1 所示。其中,  $M_A$  和  $M_B$  分别为颗粒  $A$  和颗粒  $B$  的质量,  $K_n$  和  $K_s$  分别是法向和切向刚度系数,  $C_n$  和  $C_s$  分别是法向和切向阻尼系数,  $\mu$  是摩擦系数。

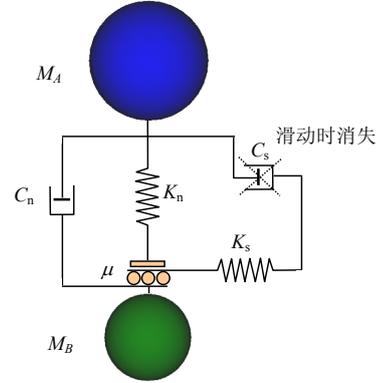


图 1 两个单元间的接触力模型

Fig.1 Contact force model between two elements

单元间法向力包括弹性力和粘滞力两部分, 即:

$$F_n = K_n x_n - C_n \dot{x}_n \quad (1)$$

式中,  $x_n$  和  $\dot{x}_n$  分别为颗粒的法向变形和变形率。

单元间的切向力也由弹性力和粘滞力两部分组成, 且满足 Mohr-Coulomb 摩擦定律, 有:

$$F_s^* = K_s x_s - C_s \dot{x}_s \quad (2)$$

$$F_s = \min(F_s^*, \text{sign}(F_s^*) \mu F_n) \quad (3)$$

式中,  $x_s$  和  $\dot{x}_s$  分别为颗粒的切向变形和应变率。

颗粒单元  $A$  和  $B$  碰撞的法向有效刚度系数为:

$$K_n = \frac{2k_n^A k_n^B}{k_n^A + k_n^B} \quad (4)$$

式中,  $k_n^A$  和  $k_n^B$  分别为球单元  $A$  和  $B$  的刚度系数。

法向阻尼系数按下式计算, 即:

$$C_n = \zeta_n \sqrt{2MK_n} \quad (5)$$

这里无量纲法向阻尼系数为:

$$\zeta_n = \frac{-\ln e}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 e}} \quad (6)$$

式中:  $M$  为两个颗粒单元的有效质量;  $e$  为回弹系数。切向和法向刚度、阻尼系数有如下关系:  $K_s = \alpha K_n$ ,  $C_s = \beta C_n$ , 这里取  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.0$ <sup>[16-17]</sup>。

在线性接触模型中, 计算步长一般取时间步长为二元接触时间的 1/50。该二元接触时间定义为:

$$T_{bc} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{2K_n}{M}(1-\zeta_n^2)}} \quad (7)$$

式中,  $T_{bc}$  为二元接触时间, 即两个颗粒单元从碰撞

到分离的接触时间。在线粘弹性模型中，它是一个与颗粒大小和材料性质相关的常数。

### 1.2 平行粘接模型

考虑单元间的冻结作用，应建立颗粒的粘接模型。粘接模型可以分为 2 种：接触粘接和平行粘接。接触粘接的粘接仅发生在接触点上，并且只能传递力；平行粘接将 2 个球体胶粘在一起，不仅可以传递力，还可以传递力矩。本文采用平行粘接模型以更合理地模拟海冰单元间的粘接作用。

在平行粘接中，2 个粘接颗粒单元间设定一个弹性粘接圆盘，如图 2 所示，其中  $\mathbf{X}^A$  和  $\mathbf{X}^B$  分别为颗粒 A 和颗粒 B 的位置矢量， $\mathbf{n}$  为接触方向矢量。圆盘可以传递 2 个单元间的作用力和力矩，即拉力、剪力、弯矩和扭矩。这里，力和力矩都可以分解为法向分量和切向分量：

$$\mathbf{F}_b = \mathbf{F}_b^n + \mathbf{F}_b^s \quad (8)$$

$$\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_b^n + \mathbf{M}_b^s \quad (9)$$

式中： $\mathbf{F}_b$  和  $\mathbf{M}_b$  分别为力和力矩矢量； $\mathbf{F}_b^n, \mathbf{F}_b^s$  和  $\mathbf{M}_b^n, \mathbf{M}_b^s$  分别是力和力矩的法向分量和切向分量。

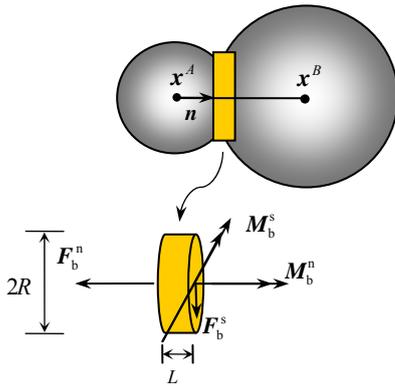


图 2 两个单元间的平行粘接模型

Fig.2 Parallel bond between two elements

在平行粘接模型中，粘接圆盘上的最大拉应力和剪应力依据梁的拉伸、扭转和弯曲理论有：

$$\sigma_{\max} = \frac{|\mathbf{F}_b^n|}{A} + \frac{|\mathbf{M}_b^n|}{I} R \quad (10)$$

$$\tau_{\max} = \frac{|\mathbf{F}_b^s|}{A} + \frac{|\mathbf{M}_b^s|}{J} R \quad (11)$$

式中， $A$ 、 $J$  和  $I$  分别为平行接触圆盘的面积、极惯性矩和惯性矩，有  $A = \pi R^2$ ， $J = 1/2\pi R^4$ ， $I = 1/4\pi R^4$ ，其中  $R$  为粘接圆盘的半径。当最大拉应力和剪应力超过其拉伸强度和剪切强度时粘接单元将断开。

### 1.3 粘接强度的确定

在海冰材料的离散单元模型中，海冰单元的粘

接强度是影响计算结果的关键参数。考虑计算中颗粒单元的大小对粘接力的影响，这里设定颗粒间的粘接强度为：

$$\sigma_b = \frac{F_n^c}{A} \quad (12)$$

式中： $\sigma_b$  为粘接强度； $F_n^c$  为粘接单元破碎时的最大拉力。

试验结果表明，海冰单轴压缩强度是海冰卤水体积(温度、盐度)、加载速率等因素的函数<sup>[6,18]</sup>。在主要考虑卤水体积影响的情况下，可将海冰单元间的粘接强度用单元间最大粘接强度  $\sigma_b^{\max}$  表示，即：

$$\sigma_b = \beta(v_b) \sigma_b^{\max} \quad (13)$$

式中， $\beta(v_b)$  为卤水体积  $v_b$  影响下的海冰强度折减系数。海冰单元间的最大粘接强度  $\sigma_b^{\max}$  可通过海冰单轴压缩强度的敏度分析进行确定。考虑海冰的压缩和弯曲强度与卤水体积有相似的对应关系<sup>[19]</sup>，则有：

$$\beta = e^{-4.29\sqrt{v_b}} \quad (14)$$

式中， $v_b$  可设为海冰温度和盐度的函数<sup>[20]</sup>，即：

$$v_b = S \left( 0.532 + \frac{49.185}{|T|} \right), \quad -0.5^\circ\text{C} \geq T \geq -22.9^\circ\text{C} \quad (15)$$

式中： $T$ ( $^\circ\text{C}$ )为海冰温度； $S$ (%)为海冰盐度。

## 2 海冰单轴压缩强度的离散单元模拟

海冰单轴压缩强度是海冰与直立结构相互作用时冰荷载计算中的关键参数，其最大特点是随加载速率的增加，会呈现一个由小到大，再由大到小的变化过程<sup>[4]</sup>。在这个过程中，海冰呈现韧性和脆性的材料性质，并在一定的应变速率下呈脆转变。但是，对于渤海海冰，在潮汐作用下海冰快速漂移，其与直立结构的相互作用更多地表现为高应变速率下的脆性破坏。此外，卤水体积、加载方向对海冰单轴压缩强度的影响可由颗粒间的粘接强度及颗粒的排列形式进行确定，从而对不同参数影响下的海冰单轴压缩强度进行准确的离散单元计算。

依据海冰单轴压缩强度的力学试验，对其进行了相应的离散单元数值模拟，主要计算参数列于表 1 中。由此计算得到的海冰受压破碎时，初始及第 0.05s 时的状况如图 3 所示，其所对应的应力-应变曲线如图 4 所示。

表 1 离散单元模拟中的主要计算参数

Table 1 Main computational parameters in DEM simulation

定义	符号	数值
海冰密度/(kg/m <sup>3</sup> )	$\rho$	920
试样尺寸/mm	$a \times b \times c$	100×100×250
颗粒大小/mm	$D$	15
法向刚度/(N/m)	$K_n$	$1.18 \times 10^7$
切向刚度/(N/m)	$K_s$	$5.9 \times 10^6$
颗粒摩擦系数	$\mu$	0.1
颗粒回弹系数	$e$	0.9
最大粘接拉伸强度/MPa	$\sigma_b^{\max}$	1.2
最大粘接剪切强度	$\sigma_s^{\max}$	$0.5 \times \sigma_b^{\max}$
加载速率/(m/s)	$U$	0.03
颗粒数量/	$N_p$	828

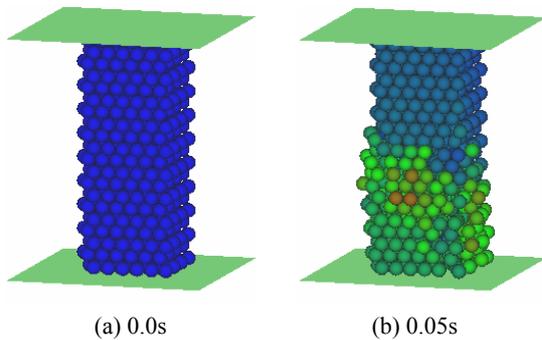


图 3 离散元数值模拟的海冰单轴压缩破碎过程

Fig.3 Failure process of sea ice under uniaxial compression simulated with DEM

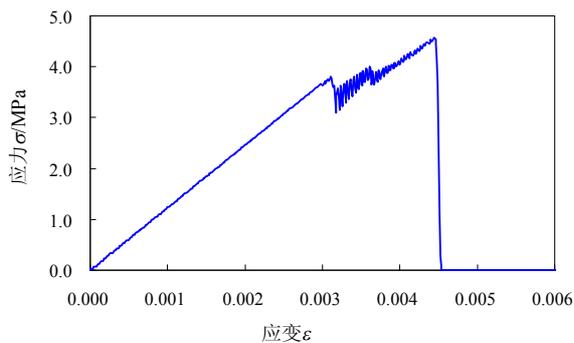
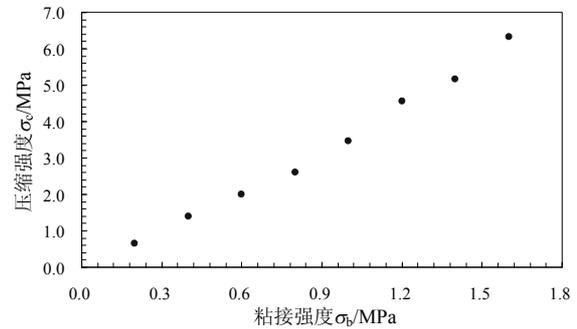


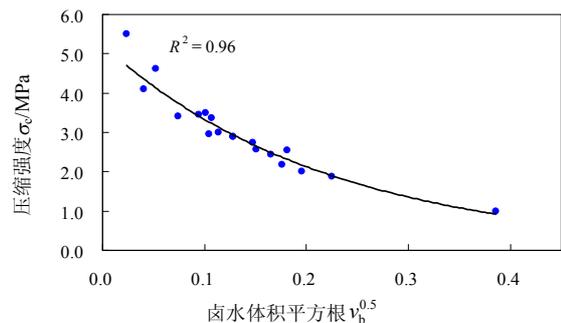
图 4 离散元模拟的海冰单轴压缩过程应力-应变曲线

Fig.4 Stress-strain curve of sea ice in uniaxial compression simulated with DEM

由此可以发现, 当海冰颗粒单元间的最大粘接强度  $\sigma_b = 1.2 \text{ MPa}$  时, 在  $0.03 \text{ m/s}$  的加载速率下, 应力随着应变的增加大体呈线性增长, 并在应变  $\varepsilon = 0.0045$  达到最大值, 即此时的海冰单轴压缩强度为  $4.54 \text{ MPa}$ 。为进一步分析粘接强度对压缩强度的影响, 这里令粘接强度  $\sigma_b$  在  $0.2 \text{ MPa} \sim 1.6 \text{ MPa}$  之间取值, 计算结果如图 5 所示。从中可以看出, 海冰的单轴压缩强度与粘接强度成正比, 且大体呈线性关系。

图 5 不同粘接强度下离散元计算的海冰单轴压缩强度  
Fig.5 Sea ice uniaxial compression strengths under various bonding strengths simulated with DEM

为分析海冰温度和盐度对单轴压缩强度的影响, 这里设定海冰颗粒单元的最大粘接强度  $\sigma_b^{\max} = 1.5 \text{ MPa}$ , 并依据式(14)确定不同温度和盐度下的强度折减系数  $\beta$ , 由此确定不同条件下的粘接强度  $\sigma_b$ 。首先设定海冰盐度  $S = 3\%$ , 且海冰温度  $T$  在  $-1 \sim -20^\circ\text{C}$  变化; 再设定海冰温度  $T = -10^\circ\text{C}$ , 且海冰盐度  $S$  在  $0.1\% \sim 7.0\%$  之间变化, 并由式(15)计算海冰卤水体积  $v_b$ , 由此确定相应的单元粘接强度  $\sigma_b$ 。计算得到的  $\sigma_c$  随  $v_b$  的变化如图 6 所示。图 6 中给出了单轴压缩强度与卤水体积的拟合曲线, 即:  $\sigma_c = 5.22e^{-4.49\sqrt{v_b}} / \text{MPa}$ , 函数拟合的残值  $R^2 = 0.96$ 。可以发现,  $\sigma_c$  随  $v_b^{0.5}$  呈很强的负指数关系, 与实验规律一致<sup>[6,21]</sup>。

图 6 不同卤水体积下的海冰单轴压缩强度计算结果  
Fig.6 Uniaxial compression strength of sea ice simulated under various brine volumes

### 3 海冰对直立结构随机动冰力的离散单元模拟

海冰与直立腿结构相互作用过程中, 海冰主要以脆性挤压破碎为主, 并产生随机动冰力<sup>[5]</sup>。这里对海冰的随机破碎过程、冰荷载时程和冰激结构振动响应进行数值计算, 主要计算参数列于表 2 中。计算中将直立腿结构视为刚体, 具有一定的质

量、刚度和阻尼，并且在海冰作用下会产生水平方向的振动。

表 2 海冰与直立结构作用离散单元模拟的主要计算参数  
Table 2 Main computational parameters in DEM simulation of dynamic ice load on vertical structures

定义	符号	数值
海冰密度/(kg/m <sup>3</sup> )	$\rho$	920
冰盖尺寸/m	$a \times b$	6×4
颗粒大小/mm	$D$	100
冰厚/m	$t_i$	0.26
冰速/(m/s)	$V_i$	0.5
颗粒数目	$N_p$	7200
颗粒法向刚度/(N/m)	$K_n$	$8.0 \times 10^7$
颗粒切向刚度/(N/m)	$K_s$	$4.0 \times 10^7$
颗粒与桩腿摩擦系数	$\mu_{wp}$	0.1
颗粒与桩腿回弹系数	$e_{wp}$	0.5
最大粘接强度/MPa	$\sigma_b^{\max}$	0.4
海冰盐度/(‰)	$S$	6
海冰温度/(°C)	$T$	-10
桩径/m	$D_p$	2.0
直立腿结构质量/kg	$M_p$	$300 \times 10^3$
结构阻尼比	$\xi_p$	0.03
结构刚度/(kN/m)	$K_p$	$5.0 \times 10^5$

数值模拟的海冰与直立腿结构相互作用过程如图 7，图 7 中颜色代表颗粒平均作用力，也反应了冰内应力场分布的大致规律，其中深色表示作用力较强。计算得到的  $x$  方向桩腿冰力时程如图 8(a) 所示，其中最大冰力为 100.08kN，均值为 44.42kN。 $y$  方向的冰力如图 8(b) 所示，其均值在 0 附近。在海冰作用下，结构的振动位移和加速度时程如图 9 所示。从中可以看出，最大冰振位移为 0.22mm，均值为 0.09mm，最大加速度为 34.31gal(1.0gal=1.0cm/s<sup>2</sup>)。以上计算得到的动冰力和冰振响应均表明，该离散单元模型可以很好地模拟海冰与直立结构相互作用的动力过程和破碎现象，能够得到冰荷载及冰激直立结构的冰振响应。

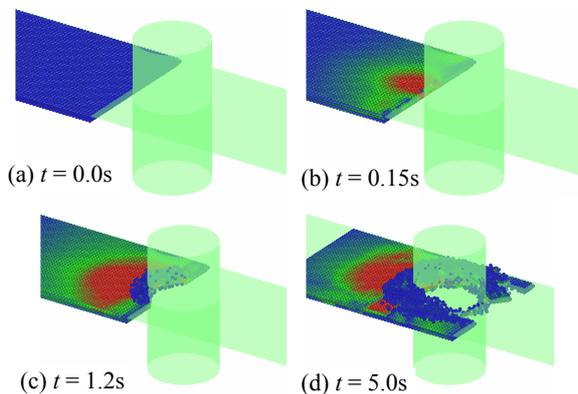


图 7 离散单元模拟的海冰与直立结构相互作用过程  
Fig.7 Interaction between sea ice and vertical structures simulated with DEM

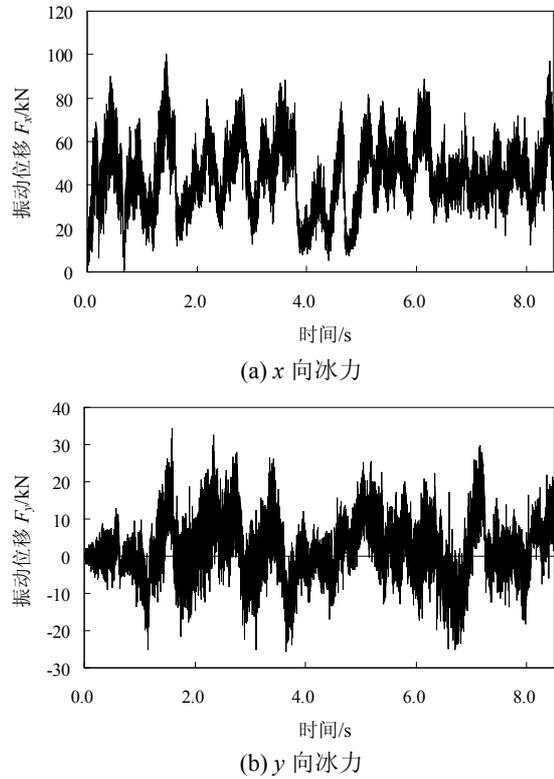


图 8 离散单元模拟的冰对直立海洋结构的动冰力  
Fig.8 Dynamic ice load on vertical offshore structures simulated with DEM

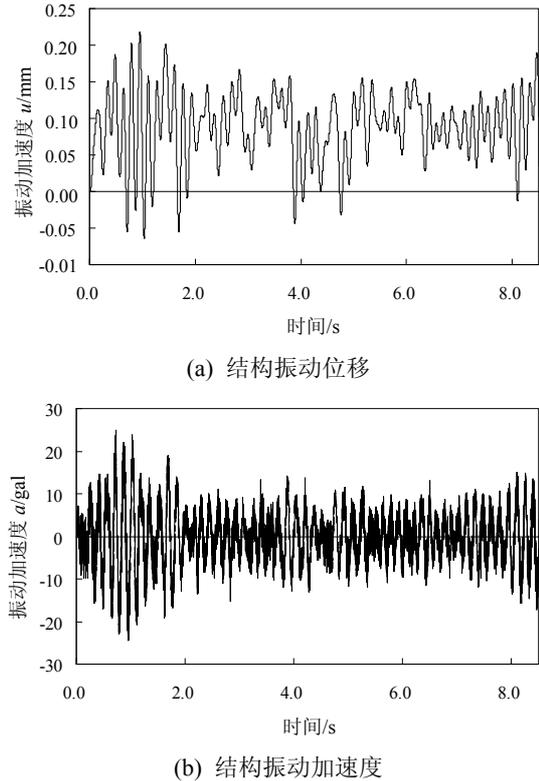


图 9 离散单元模拟的冰激结构振动的位移和加速度  
Fig.9 Ice-induced structural displacement and acceleration simulated with DEM

以上采用离散元模型对桩径为 2.0m 时直立腿结构与海冰的相互作用过程进行了数值计算。为分析不同桩径对冰荷载的影响, 这里进一步将桩径设为 1.2m、1.6m 和 2.4m, 其他计算参数如表 2, 对海冰破碎过程及冰荷载进行了计算。不同桩径下的海冰破碎现象及冰力时程如图 10 和图 11 所示。从中可以发现海冰在桩腿附近的内力分布较高, 并随海冰离桩腿距离的增加而不断降低。以上不同桩径下动冰力的均值如图 12 所示, 可以发现冰力均值随桩径的增加呈线性增长。以上结果表明, 采用离散单元方法可以合理地模拟海冰对不同桩径结构的动冰力过程, 确定海冰的破碎规律及冰荷载特性。

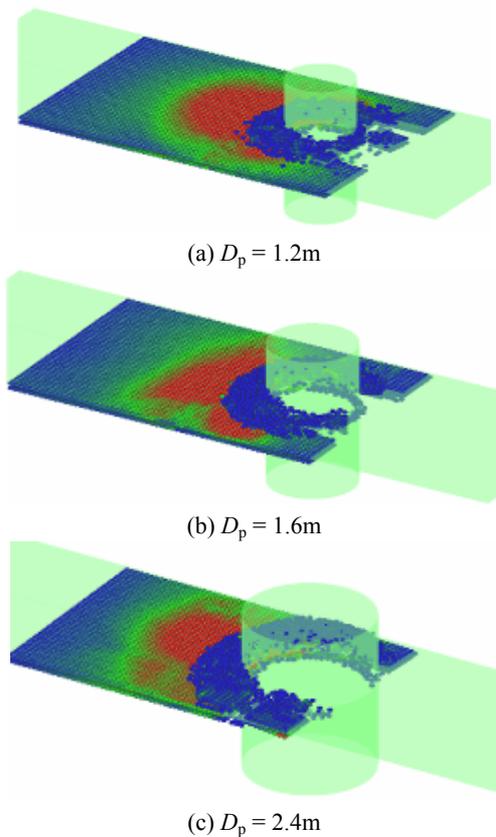


图 10 不同桩径下海冰与直立桩的相互作用过程  
Fig.10 Interaction between sea ice and vertical structure with different pile diameters

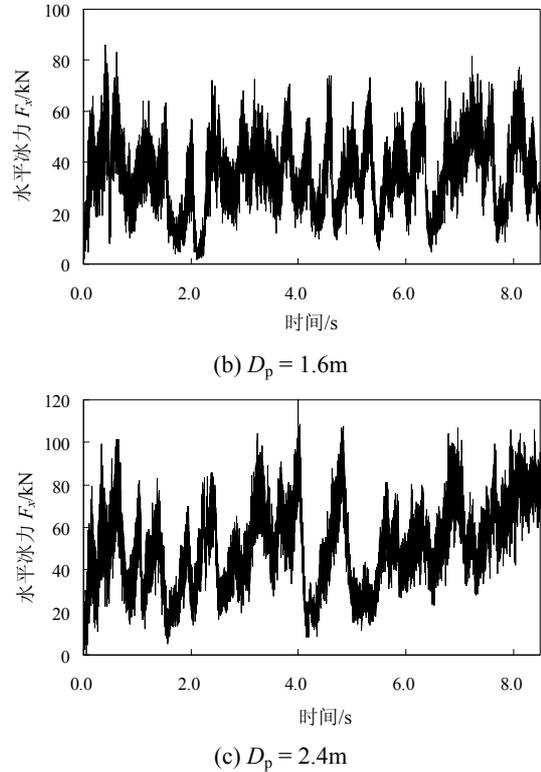
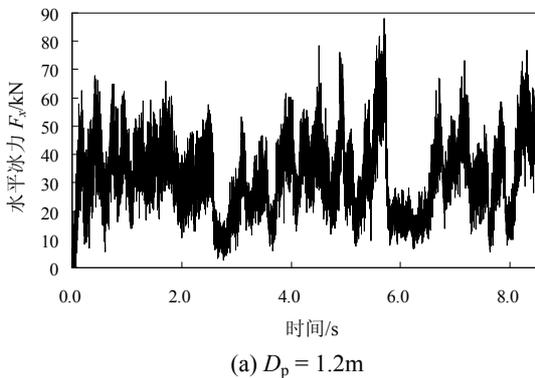


图 11 离散元模拟的不同桩径下的动冰力  
Fig.11 Dynamic ice loads with various pile diameters simulated with DEM

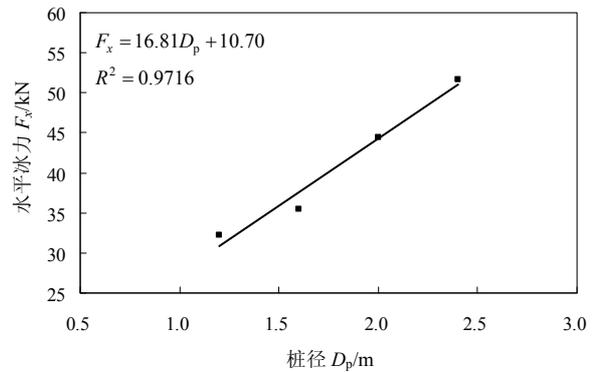


图 12 离散元模拟不同桩径下的平均冰力  
Fig.12 Mean ice loads under various pile diameters simulated with DEM

### 4 结 论

海冰与直立结构的随机作用过程及其动冰力是冰激结构振动的主要作用形式, 并会导致油气平台结构疲劳累积损伤和上部设施失效。为研究海冰与直立结构作用过程的破碎特性及冰荷载, 本文采用离散单元模型, 对海冰的单轴压缩强度、海冰与直立结构的相互作用过程进行了数值计算。将海冰单元间的粘接强度设为温度和盐度的函数, 并基于温盐与卤水体积的关系, 确定了不同卤水体积下海冰发生脆性破坏时的单轴压缩强度; 在此基础上,

对海冰与不同桩径直立腿结构的作用过程进行了离散单元计算,得到了随机冰力时程与结构冰振响应。计算结果表明平均冰力与桩径成正比。

海冰离散单元模型对深入研究海冰与直立结构的作用特性具有很好的应用前景。在下一步工作中,将深入研究海冰的韧脆转化过程及其导致的直立结构稳态振动现象,并对不同类型海洋平台的冰荷载、冰激结构振动机理和多桩腿结构的冰力掩蔽效应进行分析;将离散单元数值模拟结果与室内模型试验和现场测试数据进行对比分析,全面地检验海冰离散单元模型在冰荷载研究中的适用性。

#### 参考文献:

- [1] Sodhi D. Crushing failure during ice-structure interaction [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2001, 68: 1889—1921.
- [2] Andrew Palmer, Yue Qianjin, Guo Fengwei. Ice-induced vibrations and scaling [J]. *Cold Regions Science and Technology*, 2010, 60: 189—192.
- [3] Jordaan I. Mechanics of ice-structure interaction [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2001, 68: 1923—1960.
- [4] 李洪升, 岳前进, 郑靖明, 朱元林. 海冰韧脆转变特性的宏微观分析[J]. *冰川冻土*, 2000, 22(1): 48—52.  
Li Hongsheng, Yue Qianjin, Zheng Jingming, Zhu Yuanlin. Macro-micro analysis for ductile-brittle transition on sea ice strength [J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 2000, 22(1): 48—52. (in Chinese).
- [5] Kärnä T, Kamesaki K, Tsukuda H. A numerical model for dynamic ice-structure interaction [J]. *Computers and Structures*, 1999, 72: 645—658.
- [6] Timco G W, Weeks W F. A review of engineering properties of sea ice [J]. *Cold Regions Science and Technology*, 2010, 60: 107—129.
- [7] 史庆增. 海冰的动力作用和冰力谱[J]. *海洋学报*, 1994, 16(5): 106—112.  
Shi Qingzeng. Sea ice dynamic action and ice force spectrum [J]. *Acta Oceanologica Sinica*, 1994, 16(5): 106—112. (in Chinese)
- [8] 欧进萍, 段忠东. 渤海导管架平台桩柱冰压力随机过程模型及其参数确定[J]. *海洋学报*, 1998, 20(5): 110—117.  
Ou Jinping, Duan Zhongdong. Stochastic process model of ice acting on upright column of marine platform and determination of model parameters [J]. *Acta Oceanologica Sinica*, 1998, 20(5): 110—117. (in Chinese)
- [9] Yue Qianjin, Guo Fengwei, Tuomo Karna. Dynamic ice forces of slender vertical structures due to ice crushing [J]. *Cold Regions Science and Technology*, 2009, 56: 77—83.
- [10] 王刚, 武文华, 岳前进. 锥体接触宽度对冰排弯曲破坏模式影响的有限元分析[J]. *工程力学*, 2008, 25(1): 235—240.  
Wang Gang, Wu Wenhua, Yue Qianjin. FEM analysis on ice-bending failure mode with width effect of ice-cone interaction [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(1): 235—240. (in Chinese).
- [11] Konuk I, Gurtner A, Yu S. Study of dynamic ice and cylindrical structure interaction by the cohesive element method [C]. *Proceedings of the 20th International Conference on Port and Ocean Engineering under Arctic Conditions*. Lulea: Lulea University of Technology, 2009: POAC-94-1—11.
- [12] Gagnon R E. A numerical model of ice crushing using a foam analogue [J]. *Cold Regions Science and Technology*, 2011, 65: 335—350.
- [13] Lau M. A three dimensional discrete element simulation of ice sheet impacting a 60° conical structure [C]. *Proceedings of the 16th Interactional Conference on Port and Ocean Engineering under Arctic Conditions*, Ottawa: Canadian Hydraulics Centre, 2001: 43—440.
- [14] Selvadurai A P S, Sepehr K. Two-dimensional discrete element simulations of ice-structure interaction [J]. *Interactional Journal of Solids and Structures*, 1999, 36: 4919—4940.
- [15] Polojarvi A, Tuhkuri J. 3D discrete numerical modelling of ridge keek punch through tests [J]. *Cold Regions Science and Technology*, 2009, 56: 18—29.
- [16] Ji S, Shen H H. Internal parameters and regime map for soft polydispersed granular materials [J]. *Journal of Rheology*, 2008, 52(1): 87—103.
- [17] Campbell C S. Stress-controlled elastic granular shear flows [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2005, 539: 273—297.
- [18] Timco G W, Frederking R M W. Compressive strength of sea ice sheets [J]. *Cold Region Science and Technology*, 1990, 17: 227—240.
- [19] 季顺迎, 王安良, 苏洁, 岳前进. 环渤海海冰弯曲强度的试验测试及特性分析[J]. *水科学进展*, 2011, 22(2): 266—272.  
Ji Shunying, Wang Anliang, Su Jie, Yue Qianjin. Experimental studies and characteristics analysis of sea ice flexural strength around the Bohai Sea [J]. *Advances in Water Science*, 2011, 22(2): 266—272. (in Chinese).
- [20] Frankenstein G, Garner R. Equations for determining the brine volume sea ice from  $-0.5^{\circ}\text{C}$  to  $-22.0^{\circ}\text{C}$  [J]. *Journal of Glaciology*, 1967, 6(48): 943—944.
- [21] Moslet P O. Field testing of uniaxial compressive strength of columnar sea ice [J]. *Cold Regions Science and Technology*, 2007, 48: 1—14.